b- $A_m = \int_m^{-1} |f(x)|dx = \int_m^{-1} -f(x)dx$

(car pour $-2 < x \leq -1$ on a $f(x) \leq f(-1) = 0$)

$= \int_{-1}^{m} \text{Log}(x+2)\,dx$

$$\left(\begin{array}{lll} u'(x) = 1 & \rightarrow & u(x) = x \\ v(x) = \text{Log}(x+2) & \rightarrow & v'(x) = \dfrac{1}{x+2} \end{array} \right)$$

$= [x\text{Log}(x+2)]_{-1}^{m} - \int_{-1}^{m} \dfrac{x}{x+2}dx$

$= m\text{Log}(m+2) - m - 1 + 2\text{Log}(m+2)$

$= (m+2)\text{Log}(m+2) - (m+1).$

c- $\lim\limits_{m \to -2^+} A_m = \lim\limits_{m \to -2^+} [(m+2)\text{Log}(m+2) - (m+1)]$

(On pose $X = m+2$; $m \to -2^+$ alors $X \to 0^+$)

$= \lim\limits_{X \to 0^+} [X\text{Log}X - (X-1)]$

$= 1.$

3/ $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0.$

Soit la fonction $h :]-1;+\infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto h(x) = f(x) - x$

Ainsi $f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0.$

h est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et $\forall x \in]-1;+\infty[$ on a

$h'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{1}{x+2} - 1 = \dfrac{-x-1}{x+2} < 0$

D'où le tableau de variation de h

x	-1		$+\infty$
h'(x)	||	-	
h(x)	1	↘	$-\infty$

• $\lim\limits_{+\infty} h = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\text{Log}\left(x\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)\right) - x\right]$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{\text{Log}x}{x} + \dfrac{\text{Log}\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x} - 1\right) = -\infty$

Ainsi h est strictement décroissante sur $]-1;+\infty[$

$\Rightarrow$ h réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ dans $]-\infty, 1[\ni 0$

$\Rightarrow$ l'équation $h(x) = 0$ possède une seule solution α dans $]-1;+\infty[$.

• $h(1,1) = \ln(3,1) - 1,1 \approx 0,031 > 0$

• $h(1,2) = \ln(3,2) - 1,02 \approx -0,036 < 0$

$\Rightarrow 1,1 < \alpha < 1,2.$